$A^2=O$ であるための必要十分条件

零行列でない行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

ここで，$A^2=O$ とすると，$(a+d)A=(ad-bc)E$

$a+d\neq 0$ とすると，$A=\dfrac{ad-bc}{a+d}E$

また，$A\neq O$ より $ad-bc\neq 0$

$\therefore A=kE$ （k は 0 でない実数）

$\therefore A^2=k^2E$

これは $A^2=O$ とする仮定に反する。

よって，背理法により，$a+d=0$

また，$(a+d)A=(ad-bc)E$ より，$ad-bc=0$

よって，

零行列でない行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において，$A^2=O$ ならば $a+d=0$ かつ $ad-bc=0$

逆に，

零行列でない行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において，$a+d=0$ かつ $ad-bc=0$ ならば

ケイリー・ハミルトンの定理：$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ より，

$A^2=(a+d)A-(ad-bc)E=O$

以上より，

$A^2=O \Leftrightarrow a+d=0,\ ad-bc=0$

また，これは $A=O$ のときも成り立つ。

よって，

$A^2=O \Leftrightarrow a+d=0,\ ad-bc=0$

したがって，

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2=O$ であることを直接示すのが困難な場合は，

$a+d=0$ かつ $ad-bc=0$ が成り立つことを示せばよい。